III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
megyei szakasz, 2020. január 18.

XII. osztály

1. feladat. Adott az $f_n\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \cdot \ln^2 x$ függvény, ahol $n \in \mathbb{N}$.

a) Határozd meg f_n-nek azt az F_n primitív függvényét, amelyre $F_n(1) = 0$.

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_n(e)}{e^n}$ határértéket!

2. feladat. Értelmezzük a $G = (0,1)$ halmazon a következő műveletet

$$x * y = \frac{xy}{2xy + 1 - (x+y)},$$

bármely $x, y \in G$ estén.

a) Igazold, hogy a G halmaz zárt a „$*$” műveletre nézve!

b) Határozd meg az $f\colon G \to (0,\infty)$, $f(x) = \frac{ax}{bx-b}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ képlettel értelmezett függvényt úgy, hogy teljesüljön

$$f(x * y) = f(x) \cdot f(y),$$

bármely $x, y \in G$ esetén!

c) Számítsd ki az $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \ldots * \frac{1}{n+1}$ kifejezés értékét, tudva azt, hogy a „$*$” művelet asszociatív!

3. feladat. Ha egy valós számokból álló véges számsorozatban bármely 7 egymást követő tag összege negatív és bármely 11 egymást követő tag összege pozitív, akkor határozd meg a sorozatban a tagok számának a maximumát.

4. feladat.

a) Határozd meg azokat az $f\colon \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ deriválható függvényeket, amelyekre

$$2020 f(x) + f'(x) = 0,$$

bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén!

b) Adottak az $a < b$ valós számok és az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amely deriválható az (a,b) intervallumon és amelyre $f(a) = f(b) = 0$. Igazold, hogy létezik $c \in (a,b)$ úgy, hogy

$$2020 f(c) + f'(c) = 0.$$

Megjegyzés: Minden feladat kötelező, munkaidő: 3 óra.